О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А.М.НАДЖАФОВ
Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет

В данной работе доказываются теоремы о принадлежности решения одного класса гипоэллиптических уравнений в классе Гельдера внутри области и при нулевых краевых условиях Дирихле вплоть до границы. При этом от коэффициентов $a_{\alpha^e\delta^e}(x)$ никакой гладкости не требуется.

Рассмотрим уравнения вида.

$$\sum_{\substack{\alpha_j,\delta_j\le l_j\\ j\in e\subseteq e_n}} D^{\alpha^e}\left(a_{\alpha^e\delta^e}(x)D^{\delta^e}u(x)\right)=\sum_{\substack{\alpha_j\le l_j\\ j\in e\subseteq e_n}} D^{\alpha^e}f_{\alpha^e}(x), \tag{1}$$

где $e_n=\{1,2,\ldots,n\}$, $e\subseteq e_n$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $\delta=(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$, $\alpha^e=(\alpha_1^e,\alpha_2^e,\ldots,\alpha_n^e)$, $\alpha_j^e=\alpha_j$ при $j\in e,\alpha_j^e=0$ при $j\in e_n\setminus e=e'$, $l\in N^n$ и $G-$ограниченная $n-$мерная область с кусочно-гладкой границей ∂G. Отметим, что существование обобщенного решения задачи (1) изучены в [1]. Предполагается, что коэффициенты $a_{\alpha^e\delta^e}(x)$ -ограниченные измеримые функции в области G, $a_{\alpha^e\delta^e}(x)\equiv a_{\delta^e\alpha^e}(x)$ и при $\xi\in R^n$

$$\sum_{\substack{\alpha_j,\delta_j=l_j,\\ j\in e\subseteq e_n}}(-1)^{|\alpha^e|}a_{\alpha^e\delta^e}(x)\xi_{\alpha^e}\xi_{\delta^e}\ge c_0\sum_{e\subseteq e_n}\left|\xi_{l^e}\right|^2,\ c_0=const>0, \tag{2}$$

где $\left|\alpha^e\right|=\sum_{j\in e}\alpha_j$. А также предполагаем, что $f_{\alpha^e}\in L_2(G)$ для $\alpha_j<l_j$, $f_{\alpha^e}\in L_{2,a,\chi}(G)$ для $\alpha_j=l_j$, $j\in e\subseteq e_n$.

Пространства $S_2^lW(G)-$пополнение $„_0^\infty(G)$ в метрике

$$\|u\|_{S_2^lW(G)}=\sum_{e\subseteq e_n}\left\|D^{l^e}u\right\|_{L_2(G)},$$

пространства $\overset{0}{S}{}_2^l W(G)$ – пополнение $C_0^\infty(G)$ в метрике $S_2^l W(G)$.

Обобщенным решением задачи (1) в области G называется функция $u \in S_2^l W(G)$ такая, что

$$\sum_{\substack{\alpha_j,\delta_j \le l_j,\\ j\in e\subseteq e_n}} (-1)^{|\alpha^e|} \int_G a_{\alpha^e\delta^e}(x) D^{\delta^e} u(x) D^{\alpha^e} \upsilon(x)dx = \sum_{\substack{\alpha_j \le l_j,\\ j\in e\subseteq e_n}} (-1)^{|\alpha^e|} \int_G f_{\alpha^e}(x) D^{\alpha^e} \upsilon(x)dx \quad (3)$$

при любой функции $\upsilon \in \overset{0}{S}{}_2^l W(G)$. Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$-целочисленный вектор, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, а $d = (d_1, \ldots, d_n)$-фиксированный вектор, причем $0 < b_j \le d_j < 1$, $j \in e_n$.

Теорема 1. Если $l_j - \nu_j > 0, j \in e_n$, то всякое обобщенное решение уравнения (1) из пространства $S_2^l W(G)$ принадлежит к пространству $C_{\nu+\beta^1}(G^d)$ $\left(\overline{G}^d \subset G\right)$, где $C_{\nu+\beta^1}(G^d)$ – гельдерово пространство.

Доказательство. Сначала рассмотрим уравнение вида

$$\sum_{\substack{\alpha_j,\delta_j = l_j,\\ j\in e\subseteq e_n}} D^{\alpha^e}\left(a_{\alpha^e\delta^e}(x) D^{\delta^e} u(x)\right) = 0. \quad (4)$$

Пусть $x_0 \in G$ и параллелепипед $\Pi_b(x_0) = \left\{x: \left|x_j - x_{0j}\right| < b_j, j \in e_n\right\}$. Пусть G^d – подобласть области G такая, что $x_1 \in \partial G, x_2 \in G^d$ справедливо неравенство $\left|x_{1j} - x_{2j}\right| > d_j, j \in e_n$. Утверждение теоремы будем доказывать в G^d. Из вариационного принципа следует, что

$$\int_{\prod_b(x_0)} \sum_{\substack{\alpha_j,\delta_j = l_j\\ j\in e\subseteq e_n}} (-1)^{|\alpha^e|} a_{\alpha^e\delta^e}(x) D^{\delta^e}\left[\theta(x)(u - P(x))\right] D^{\alpha^e}\left[\theta(x)(u - P(x))\right]dx \ge$$

$$\ge \int_{\prod_b(x_0)} \sum_{\substack{\alpha_j,\delta_j = l_j\\ j\in e\subseteq e_n}} (-1)^{|\alpha^e|} a_{\alpha^e\delta^e}(x) D^{\delta^e}(u - P(x)) D^{\alpha^e}(u - P(x))dx =$$

$$= A\left(u - P(x), \prod_b(x_0)\right). \quad (5)$$

При любом $\theta(x) \in C^\infty(\prod_b(x_0))$ такой, что $\theta(x) \equiv 1$ в окрестности $\partial\prod_b(x_0)$ и любом полиноме $P(x)$ вида $P(x) = \sum_{\substack{\alpha_j = l_j\\ j\in e_n}} C_\alpha x^\alpha$ и при произвольном решении u уравнения (4).

Пусть $\theta(x) \equiv 1 - \prod_{j\in e_n} \sigma_j\left(\frac{x_j - x_{0j}}{b_j}\right)$, где $\sigma_j(t_j) \in C^\infty(R^1)$ такова, что $\sigma_j(t_j) \equiv 1$ при $|t_j| < \frac{1}{2}$; $\sigma_j(t_j) \equiv 0$ при $|t_j| \geq 1$ и значит $0 \leq \sigma_j(t_j) \leq 1$. Ясно $\theta(x) \equiv 0$ в $\prod_{\frac{b}{2}}(x_0), \theta(x) \equiv 1$ в окрестности $\partial \prod_b(x_0)$. Выберем C_α так, чтобы при всех α

$$\int\limits_{\prod_b(x_0)\setminus\prod_{\frac{b}{2}}(x_0)} [u - P(x)] x^\alpha dx = 0\ ,$$

С помощью неравенства (4.4.1) в [2], учитывая (2), получим

$$A(u - P(x), \Pi_b(x_0)) \leq A\left(u - P(x), \Pi_b(x_0) \setminus \Pi_{\frac{b}{2}}(x_0)\right) +$$

$$+ C \int\limits_{\prod_b(x_0)\setminus\prod_{\frac{b}{2}}(x_0)} \sum_{\substack{\alpha_j < l_j,\\ \alpha_j + s_j = l_j,\\ j\in e\subseteq e_n}} \prod_{j\in e} d_j^{-2s_j} \left[D^{\alpha^e}(u - P(x)\right]^2 dx \leq$$

$$\leq qA\left(u - P(x),\ \Pi_b(x_0) \setminus \Pi_{\frac{b}{2}}(x_0)\right), \tag{6}$$

где $q > 1$ и от b не зависит. Так как $A(u - P(x), G) = A(u, G)$, то из (6) следует, что

$$A\left(u, \Pi_{\frac{b}{2}}(x_0)\right) \leq \left(1 - \frac{1}{q}\right) A(u, \Pi_b(x_0)).$$

и отсюда по индукции следует, что

$$A\left(u, \Pi_{\frac{b}{2^k}}(x_0)\right) \leq \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k A(u, G).$$

Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), 0 < \varepsilon_j < \frac{b_j}{2^k}, j \in e_n$, то $\prod_\varepsilon(x_0) \subset \prod_{\frac{b}{2^k}}(x_0)$, и далее $2^k < \prod_{j\in e_n} \frac{b_j}{\varepsilon_j}$,

$$k\ln 2<\ln\prod_{j\in e_n}\frac{b_j}{\varepsilon_j},\ k=\left[\frac{\ln\prod_{j\in e_n}\frac{b_j}{\varepsilon_j}}{\ln 2}\right],\ \lambda=1-\frac{1}{q}.$$ Поэтому

$$A(u,\Pi_\varepsilon(x_0))\le\lambda^k A(u,G)<\lambda^{\frac{\ln\prod_{j\in e_n}\frac{b_j}{\varepsilon_j}}{\ln 2}-1}A(u,G)=e^{\frac{\ln\lambda}{\ln 2}\ln\prod_{j\in e_n}\frac{b_j}{\varepsilon_j}-\ln\lambda}A(u,G)\le$$
$$\le C\prod_{j\in e_n}\left(\frac{\varepsilon_j}{b_j}\right)^{\xi_j-\sigma_j}A(u,G),\tag{7}$$

где $\xi=\left|\frac{\ln\lambda}{\ln 2}\right|=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$, $\sigma=\left|\frac{\ln\lambda}{\ln\Pi_{j\in e_n}\frac{b_j}{\varepsilon_j}}\right|=\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n$,

$0<\xi_j,\sigma_j<1$, при любом $\varepsilon_j\le b_j\le d_j, j\in e_n$ и $x_0\in G^d$. Отсюда получаем, что

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\left(\prod_{j\in e_n}\eta_j^{-\xi_j}\int_{\Pi_\eta(x_0)}u^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j\in e_n}\frac{d\eta_j}{\eta_j}\le C\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{j\in e_n}\frac{db_j}{b_j^{1-\frac{1}{2}\sigma_j}}<\infty.$$

Пусть $\xi_j=\chi_j a_j$, $j\in e_n$ и сравниваем с теоремы 1 и 2 в [2]. Поэтому $u\in L_{2,a,\chi,1}(G^d)\subset L_{2,a,\chi,\tau}(G^d)$, а также $D^{l^e}u\in L_{2,a,\chi,\tau}(G^d)$ для всех $e\subseteq e_n$, т.е. $u\in S^l_{2,a,\chi,\tau}W(G)$. Если проверить условия теоремы 1, то окажется $\varepsilon_j>0$, $\varepsilon^0_j>0$, $j\in e_n$. Таким образом, по теореме 1 в [2] $D^\nu u$ непрерывна на G^d, а по теореме 2 в [2] $D^\nu u$ удовлетворяют условию Гельдера. Следовательно, u принадлежит к пространству $C_{\nu+\beta^1}(G^d)$.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение
$$\sum_{\substack{\alpha_j,\delta_j=l_j\\ j\in e\subseteq e_n}}D^{\alpha^e}\left(a_{\alpha^e\delta^e}(x)D^{\delta^e}u(x)\right)=\sum_{\substack{\alpha_j\le l_j\\ j\in e\subseteq e_n}}D^{\alpha^e}f_{\alpha^e}(x),\tag{8}$$

где $a_{\alpha^e\delta^e}(x)$ удовлетворяет ранее наложим ограничениям, $f_{\alpha^e}\in L_2(G)$ для $\alpha_j<l_j$, $f_{\alpha^e}\in L_{2,a,\chi}(G)$ для $\alpha_j=l_j$, $j\in e_n$. Пусть u_{b,x_0} – решение

уравнения (8) в $\prod_b(x_0)$ из пространства $\overset{0}{S}{}_2^l W\left(\Pi_b(x_0)\right)$. Решение понимается в обобщенном смысле, т.е.

$$\sum_{\substack{\alpha_j,\delta_j=l_j,\\ j\in e\subseteq e_n}} (-1)^{|\alpha^e|}\int_G a_{\alpha^e\delta^e}(x)D^{\delta^e}u(x)D^{\alpha^e}\upsilon(x)dx=\sum_{\substack{\alpha_j\le l_j,\\ j\in e\subseteq e_n}}(-1)^{|\alpha^e|}\int_G f_{\alpha^e}(x)D^{\alpha^e}\upsilon(x)dx \quad (9)$$

при любом $\upsilon\in \overset{0}{S}{}_2^l W\left(\Pi_b(x_0)\right)$. Существование такого решения доказано в [1]. Положим в (9) $\upsilon\equiv u_{b,x_0}$ получим в силу (2), что

$$\int_{\prod_b(x_0)}\sum_{\substack{\alpha_j=l_j\\ j\in e\subseteq e_n}}\left(D^{\alpha^e}u_{b,x_0}\right)^2dx\le C\sum_{\substack{\alpha_j<l_j\\ j\in e\subseteq e_n}}\prod_{j\in e_n}b_j^{2s_j}\int_{\prod_b(x_0)}f_{\alpha^e}^2dx+$$

$$+\sum_{\substack{\alpha_j=l_j\\ j\in e\subseteq e_n}}\int_{\prod_b(x_0)}f_{\alpha^e}^2dx\le C_1\prod_{j\in e_n}b_j^{\zeta_j}, \quad (10)$$

если $\zeta_j=\min\{2l_j-2a_j,\chi_ja_j\}=\min\{2s_j,\chi_ja_j\}$; где C и ζ_j от u, x_0 не зависят, $b_j\le 1$ при $j\in e_n$. Функция $\bar u=u-u_{b,x_0}$ удовлетворяет уравнение (4) в $\Pi_b(x_0)$. Тогда для нее справедливо неравенство (7) , т.е.

$$A\left(\bar u,\Pi_\varepsilon(x_0)\right)\le C_1\prod_{j\in e_n}\left(\frac{\varepsilon_j}{b_j}\right)^{\xi_j-\sigma_j}A(u,G), \quad (11)$$

$\varepsilon_j\le b_j\le d_j, j\in e_n$, если $x_0\in G^b$, то

$$A\left(u,\ \Pi_\varepsilon(x_0)\right)\le 2A\left(\bar u,\ \Pi_\varepsilon(x_0)\right)+2A\left(u_{b,x_0},\ \Pi_\varepsilon(x_0)\right)$$

Из неравенств (10) и (11) следует, что $\left(\left(\frac{\varepsilon_j}{b_j}\right)^{\xi_j-\sigma_j}=b_j^{\zeta_j}\right)$

$$A\left(u,\prod_\delta(x_0)\right)\le C_2\prod_{j\in e_n}\left(\frac{\varepsilon_j}{b_j}\right)^{\xi_j-\sigma_j}A(u,G)+C_3\prod_{j\in e_n}b_j^{\zeta_j}\le C_4\prod_{j\in e_n}\left(\frac{\varepsilon_j}{b_j}\right)^{\xi_j-\sigma_j},$$

и, следовательно

$$\int_0^1\ldots\int_0^1\left(\prod_{j\in e_n}\eta_j^{-\xi_j}\int_{\prod_\eta(x_0)}u^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j\in e_n}\frac{d\eta_j}{\eta_j}\le C\int_0^1\ldots\int_0^1\prod_{j\in e_n}\frac{db_j}{b_j^{1-\frac{1}{2}\sigma_j}}<\infty.$$

И здесь также применяем теоремы 1, 2 в [2] получаем, что $D^\nu u$ непрерывна и удовлетворяет условию Гельдера на G.

Наконец, рассмотрим уравнение (1). Обобщенное решение уравнения

(1) понимается в виде (3) и является обобщенным решением уравнения

$$\sum_{\substack{\alpha_j,\delta_j=l_j\\ j\in e\subseteq e_n}} D^{\alpha^e}\left(a_{\alpha^e\delta^e}(x)D^{\delta^e}u(x)\right)=\sum_{\substack{\alpha_j\le l_j\\ j\in e\subseteq e_n}} D^{\alpha^e} f^*_{\alpha^e}(x),$$

где $f^*_{\alpha^e}=f_{\alpha^e}-\sum_{\substack{\delta_j<l_j,\\ j\in e_n}} a_{\alpha^e\delta^e}D^{\delta^e}u(x)$, так, что $f^*_{\alpha^e}\in L_2(G)$ и для решения уравнения (1) справедливы все утверждения относительно к решений уравнения (8).

Теорема 2. Пусть область G такова, что существует $\rho=const>0$, такое, что каковы бы ни были точка $x_0\in\partial G$ и число $r<1$, существует параллелепипед

$$\Pi_{\rho r}(x^1)\subset\Pi_r(x_0)\cap(R^n\setminus G)$$

и пусть $u(x)$ решение уравнения (1) из $\overset{0}{S}{}_2^l W(G)$. Если $l_j-\nu_j>0, j\in e_n$, то $u(x)$ принадлежит к пространству $C_{\nu+\beta^1}(\overline{G})$.

Аналогичная задача решена для уравнений вида

$$\sum_{\substack{\left|\alpha,\frac{1}{l}\right|\le 1,\\ \left|\delta,\frac{1}{l}\right|\le 1}} D^{\alpha}\left(a_{\alpha\delta}(x)D^{\delta}u(x)\right)=\sum_{\left|\alpha,\frac{1}{l}\right|\le 1} D^{\alpha} f_{\alpha}(x)$$

Р.В.Гусейновым [3] , но однако отметим, что в настоящей работе в отличие от [3]:

1) «показатель» гельдеровости больше чем в [3];
2) f_{α^e} для $\alpha_j=l_j$ при всех $j\in e\subseteq e_n$ принадлежит более широкому классу, т.е. $f_{\alpha^e}\in L_{2,a,\chi}(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наджафов А.М. О решениях одного класса гипоэллиптических уравнений. Докл. НАН Азербайджана, т. LIX, №1-2, 2003, стр. 56-61
2. Наджафов А.М. О некоторых свойствах функций из пространств типа Соболева-Морри с доминирующей смешанной производной $S^r_{2,a,\chi,\tau}W(G)$. Вест. Бак. Уни-та, сер. физ.-мат. наук, №3, 2004, стр. 44-53.
3. Гусейнов Р.В. О гладкости решений одного класса квазиэллиптических уравнений. Вест. Моск. Уни-та, сер. 1, матем. мех., №6, 1992, стр. 10-14.

BİR SİNİF YÜKSƏK TƏRTİBLİ TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN HAMARLILIĞI HAQQINDA

A.M.NƏCƏFOV

XÜLASƏ

İşdə əmsallardan heç bir hamarlılıq şərti tələb etmədən bir sinif hipoelliptiк tənliкlərin həllərinin oblastın daxilində Hölder sinfinə daxil olması və sərhəddə sıfır qiymət alan Dirixle məsələsi üçün həllin sərhədə qədər davam etdirilməsi haqqında teoremlər isbat olunur. Qeyd edəк кi, bu halda əmsallardan heç bir hamarlılıq tələb olunmur.

ON SMOOTHNESS OF SOLUTION A CLASS EQUATION'S OF HIGHER ORDER

A.M.NAJAFOV

SUMMARY

In the work the theorems on belong solution a class hypelliptic equation in the Holder space into domain and at under zero's boundaries Dirichle's condition up to the boundary. A this on coefficients of equation nothing smoothness is not demanded.